Theoretische Physik IV: Statistische Mechanik und Thermodynamik

1. Übungsblatt

Abgabedatum: Freitag, 25.4.08 in den Übungen

Aufgabe 1.1 *(Phasenraum eines freien Teilchens)* **(10 Punkte)**

Ein freies Teilchen der Masse m befinde sich in einer Box der Länge L (1-dimensional), deren Wände unendlich hoch sind.

(a) Wie groß ist das Volumen des *klassischen* Phasenraums mit Energien im Intervall $[E-\Delta, E+\Delta]$. Was ergibt sich für $\Delta \ll 1$? (3 Punkte)

(b) Wie groß ist das Volumen des *klassischen* Phasenraums mit Energie kleiner gleich E? (2 Punkte)

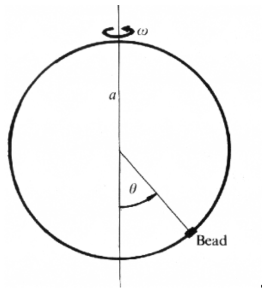
(c) Wie groß ist die Anzahl an Zuständen mit Energien kleiner gleich E für das entsprechende *quantenmechanische* System? Vergleiche das Ergebnis mit dem klassischen für großes E. (5 Punkte)

Aufgabe 1.2 *(Phasenraumtrajektorien eines Systems)* **(10 Punkte)**

Wir betrachten ein System mit folgender kinetischer Energie T und potentieller Energie V

$$T = \frac{1}{2} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) \qquad V = -mga\cos\theta$$

Das System beschreibt ein Teilchen auf einer Kreisbahn mit Radius a, wobei die Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert (siehe Grafik).



(a) Stelle die Bewegungsgleichung für das System auf mit Hilfe der Lagrange-Gleichung: (2 Punkte)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

(b) Gebe die Phasenraumtrajektorien $f(\theta, \dot{\theta}) = C(\equiv const.)$ für das System an. (3 Punkte)

(c) Bestimme die Gleichgewichtspunkte des Systems, d.h. $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ (1 Punkt)

(d) Wir möchten nun untersuchen, wie die Phasenraumtrajektorien in der Nähe des Punktes $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ aussehen. Entwickle dazu in die Gleichung $f(\theta, \dot{\theta}) = C$ aus Aufgabenteil (b) bis zur zweiten Ordnung in $\dot{\theta}$ und θ. Wie sehen die Trajektorien für $a\omega^2/g < 1$ und $a\omega^2/g > 1$ aus. Zeichne eine Schar von Trajektorien für beide Fälle. (4 Punkte)

Aufgabe 1.3 *(Dichteoperator)* **(10 Punkte)**

Seinen $|\psi_i\rangle$ normierte Zustände des Hilbertraums und $p_i \in [0,1]$ mit $\sum_i p_i = 1$. Dann ist der Dichteoperator $\hat{\rho}$ definiert als

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

Betrachte nun einen zweidimensionalen Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ und Dichteoperator

$$\hat{\rho} = \alpha \left|1\right\rangle \left\langle 1\right| + \frac{1}{2} \left|x\right\rangle \left\langle x\right| \qquad \text{mit } \left|x\right\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}$$

(a) Bestimme α so, dass $\hat{\rho}$ tatsächlich ein Dichteoperator ist. (3 Punkte)

(b) Was ist die Matrixdarstellung des Dichteoperators in der Basis $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ mit $|x\rangle = \frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}}$ und $|y\rangle = \frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}}$? (4 Punkte)

(c) Das System durchläuft eine Apparatur, welche nur die Zustände $|1\rangle$ durchlässt (z.B. eine Stern-Gerlach-Apparatur). Wie sieht der Dichteoperator des Systems nach Verlassen der Apparatur aus? (3 Punkte)