Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 7

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 Drehungen in der (komplexen) Ebene (5 P)

Es sei $z = a + ib$ und $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Finden Sie die 2×2-Drehmatrix $D(\phi)$, mit der die Transformation

$$\vec{v} \to D(\phi)\vec{v}$$

gerade der Transformation $z \to e^{i\phi}z$ in der komplexen Ebene entspricht.

Aufgabe 2 Exponentialdarstellung von Drehmatrizen (4+5+5+6 P)

Wir betrachten die Matrizen $(T^a)_{bc} = -i\epsilon_{abc}$,

$$T^1 = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^2 = -i \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^3 = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eine beliebige reell-antisymmetrische 3×3-Matrix lässt sich als Linearkombination $i\phi^a T^a$ der sogenannten Generatoren T^a schreiben[1].

a) Zeigen Sie, dass für beliebiges reell antisymmetrisches X die Matrix $T = e^X$ orthogonal ist.

b) Zeigen Sie, dass
$$Tr(T^a T^b) = 2\delta^{ab} \quad \text{und} \quad [T^a, T^b] = i\epsilon_{abc}T^c\,. \tag{1}$$

c) Überzeugen Sie sich, dass $(iT^1)^2 = -\text{diag}(0,1,1)$, $(iT^1)^3 = -iT^1$, $(iT^1)^4 = \text{diag}(0,1,1)$ etc., und analog für T^2 und T^3.

d) Berechnen Sie $\exp(i\phi\, T^1)$, $\exp(i\phi\, T^2)$ und $\exp(i\phi\, T^3)$. Die resultierenden Matrizen sollten Drehungen mit dem Winkel ϕ um die x_1, x_2 bzw. x_3-Achse beschreiben.

Aufgabe 3 Allgemeine Drehachsen (5 P)

Man kann die allgemeine Drehung eines Vektors

$$\vec{v}\,' = e^{i\phi^a T^a}\vec{v}$$

auch schreiben als

$$T^a v'^a = e^{i\phi^b T^b}\,(T^c v^c)\,e^{-i\phi^d T^d}\,.$$

Zeigen Sie anhand dieses Zusammenhangs, dass die Matrix $e^{i\phi^a T^a}$ um die Drehachse $\vec{\phi}$ dreht! (*Hinweis:* Wie wirken Drehungen auf die Drehachse?)

[1] Wir benutzen ab hier um der Übersichtlichkeit Willen die Einstein'sche Summenkonvention: über jeden in einem Produkt doppelt vorkommenden Index (hier a) wird summiert. Beachten Sie, dass beim Rechnen unter Umständen Summationsindizes umbenannt werden müssen, um Dopplungen zu vermeiden, z.B. $(\phi^a T^a)^2 = \phi^a T^a \phi^b T^b$, *nicht* $\phi^a T^a \phi^a T^a$.