Übungsaufgaben Quantenmechanik SS12
Blatt 2

Fakultät für Physik und Astronomie

Aufgabe 1 Skalarprodukte und Zustände (10 P)

Benutzen Sie die Definition des Skalarproduktes in einer Dimension

$$\langle\phi|\psi\rangle := \lim_{\Delta x\to 0}\langle\phi|\psi\rangle_{\Delta x} = \int_a^b \phi^*(x)\psi(x)dx$$

aus der Vorlesung und zeigen Sie

a) $\langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle$

b) $\langle\psi|\psi\rangle \in \mathbb{R}$

c) $\langle c|\big(|a\rangle + |b\rangle\big) = \langle c|a\rangle + \langle c|b\rangle$

d) $\langle .|.\rangle$ ist antilinear im ersten Argument, linear im zweiten.

e) Sei $\psi(x) = \sin\big(2\pi x/(a-b)\big)$. Für welche Funktionen $\phi(x)$ gilt $\langle\phi|\psi\rangle = 0$?

Aufgabe 2 Spektraldarstellung (10 P)

Wir betrachten einen dreidimensionalen Zustandsraum mit Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, und den Dualraum mit Basis $\{\langle 1|, \langle 2|, \langle 3|\}$, so dass $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$.

a) In dieser Basis laute die Matrix A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix},$$

d.h. $A_{ij} = \langle i|A|j\rangle$. Schreiben Sie die Matrix als Summe von Objekten der Form $|i\rangle\langle j|$.

b) Finden Sie die Eigenwerte und (normierten) Eigenvektoren von A in dieser Basis.

c) Geben Sie eine Basis $\{|1'\rangle, |2'\rangle, |3'\rangle\}$ und eine Basis des Dualraums $\{\langle 1'|, \langle 2'|, \langle 3'|\}$ als Linearkombinationen der ursprünglichen Basen an so dass

$$\langle i'|j'\rangle = \delta_{ij}$$

und

$$A = \lambda_1|1'\rangle\langle 1'| + \lambda_2|2'\rangle\langle 2'| + \lambda_3|3'\rangle\langle 3'|$$

Aufgabe 3 Heisenberg-Gleichung (10 P)

Für zwei Operatoren Q und P soll gelten $[Q, P] = i\hbar$.

a) Sei $H = \frac{1}{2m}P^2$. Berechnen Sie $\dot{P}$ und $\dot{Q}$ nach der Heisenberg-Gleichung.

b) Sei $H = c\,QPPQ$. Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(PQQP)$ nach der Heisenberg-Gleichung.

c) Gegeben sei der selbstadjungierte Operator A und der selbstadjungierte Hamiltonoperator H. Zeigen Sie, dass A zeitlich konstant ist falls

$$e^{iA\theta}He^{-iA\theta} = H$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$. (Dies ist eine QM-Version des Noethertheorems)